Место для титульного листа

**Оглавление**

[**Введение** 4](#_Toc89545820)

[Глава 1. Числовые ряды 5](#_Toc89545821)

[1.1. Основные Понятия 5](#_Toc89545822)

[1.2 Простейшие свойства сходящихся рядов 12](#_Toc89545823)

[1.3 Достаточные признаки сходимости положительных рядов 20](#_Toc89545824)

[1.4 Сходимость знакопеременных рядов 32](#_Toc89545825)

[1.5 Свойства сходящихся рядов 36](#_Toc89545826)

[Глава 2. Функциональные ряды 42](#_Toc89545827)

[2.1 Основные понятия функционального ряда 42](#_Toc89545828)

[2.2 Равномерная сходимость функционального ряда 46](#_Toc89545829)

[2.3 Функциональные свойства равномерно сходящихся рядов 51](#_Toc89545830)

[2.4 Степенные ряды 55](#_Toc89545831)

[2.5 Свойства степенных рядов 61](#_Toc89545832)

[2.6 Разложение функции в степенные ряды 64](#_Toc89545833)

[2.7 Некоторые задачи 67](#_Toc89545834)

[Глава 3. Ряды Фурье 69](#_Toc89545835)

# **Введение**

Глава 1. Числовые ряды

* 1. Основные Понятия

**Числовой ряд –** формально записанная сумма элементов числовой последовательности, общий член которой представляет собой значение функции натурального аргумента n. При этом элемент также называют элементом соответствующего ряда.

 (ряд 1)

 (1)

Из этого можно получить частичные суммы:  
    – последовательность частичных сумм ряда.  
 Если последовательность частичных сумм (ряда 1) имеет предел , где , то это число S называется **суммой** (ряда 1).  
 Тогда .   
 В том случае, если S является конечным действительным числом, то есть  , где , (ряд 1) называется ***сходящимся***.  
 В том случае, если  или не существует (последовательность расходится и не имеет предела), то (ряд 1) называется ***расходящимся***.  
 В любом случае, либо предела нет, либо последовательность бесконечно велика.  
 Исследование вопроса о сходимости числового ряда связано с исследованием сходимости последовательности его частичных сумм. С другой стороны, часто используя специфические инструменты исследования сходимости числового ряда возможно доказать сходимость последовательности его членов.  
 Для доказательства сходимости необходимо составить последовательность частичных сумм и найти её предел.   
 Для того, чтобы сформировать ряд соответствующий этой последовательности, достаточно составить ряд вида:  
 Тогда последовательность частичных сумм этого ряда:





  
 Если ряд сойдётся , то и последовательность сойдётся тоже.  
**Пример 1**. Рассмотрим ряд, который мы называем рядом , составленным из членов геометрической прогрессии.

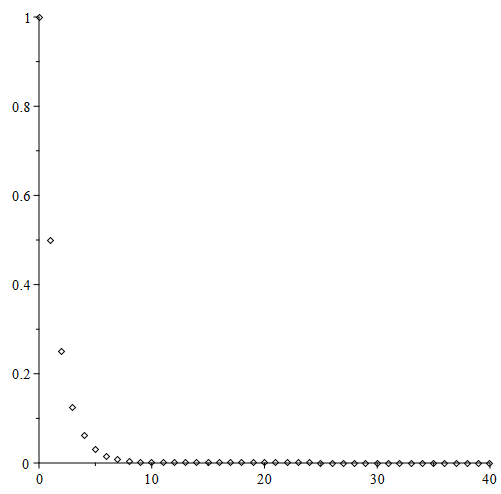
  
 При исследовании ряда на сходимость по определению необходимо составить n-ю частичную сумму.  
 Частичная сумма представляет собой общий член последовательности частичных сумм.   
, где q

где 

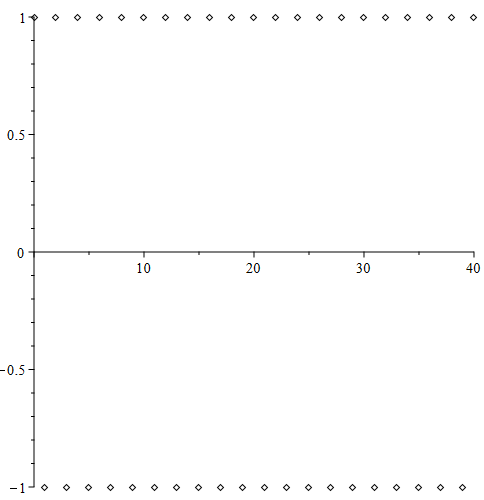


Продемонстрируем истинность утверждения графиками, построенными в СКА Maple, где в нашем случае «точки» это частичные суммы ряда:

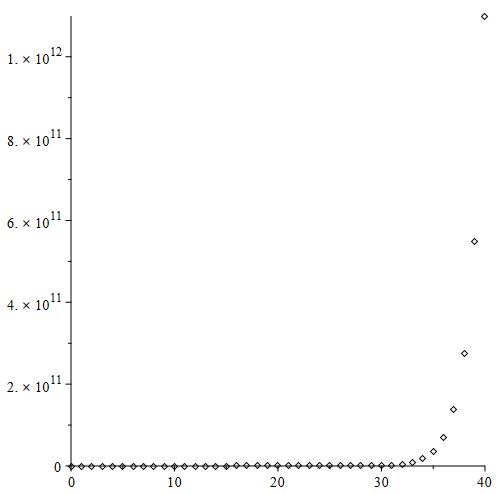
**График 1.1 **



**График 1.2 **

**

**График 1.3** 



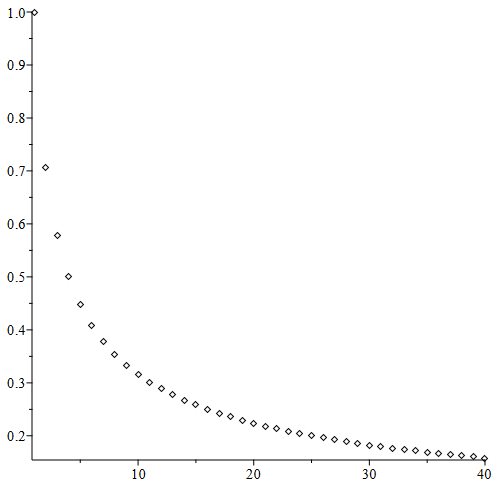


При  
 Этот ряд сходится при и его сумма равна .  
**Пример 2**.

 Все члены последовательности убывают.

Составим общий член последовательности частичных сумм:  
   
Найдём нижнюю оценку для этой конечной суммы, для этого посчитаем, сколько здесь слагаемых и заменим на меньшее.   
Таким образом:   
 

**График 1.3** Частичные суммы числового ряда



**Пример 3.**



Запишем общий член этой последовательности:



Распишем:  Используя свойство коммутативности и ассоциативности приводим к виду:



  
**Пример 4.**

n-я частичная сумма:

 Это конечная сумма, для неё работает закон ассоциативности и коммутативности. Так как это конечная сумма:

 Запишем сумму так, чтобы общий член был одинаковым (равен ):



По нижнему индексу берём максимальный, по верхнему – минимальную:





1.2 Простейшие свойства сходящихся рядов

**Теорема 1 (необходимый признак сходимости).**

*Если ряд сходится, то последовательность его элементов является бесконечно малой.*



***Замечание!*** *Из того, что последовательность членов ряда бесконечно мала нельзя сделать сразу вывод о сходимости ряда. Одним из подтверждений данного замечания является* ***гармонический ряд****, о котором мы поговорим позже.*

Доказательство:

Дано, что ряд сходится, поэтому (S – конечное число)

Нужно найти предел последовательности, состоящей из элементов ряда. Ясно, что  где , тогда, . Значит, 

Поскольку предел и стремится к S, тогда



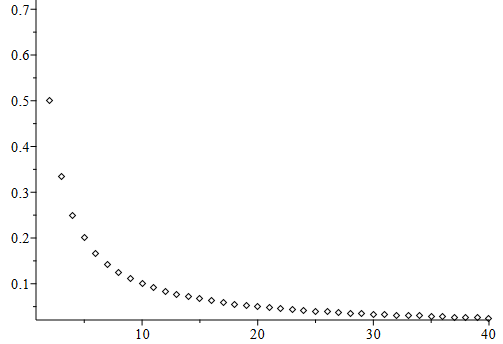
**Теорема 2 (достаточный признак расходимости).**

*Комментарий: поскольку не все ряды с бесконечно малой последовательностью элементов сходятся, то при выполнении условия  – можно сразу сделать вывод, что ряд, составленный из элементов является расходящимся.*

***Замечание!*** *Исследование числовых рядов на сходимость целесообразно начинать с нахождения предела последовательности его элементов. Если предел не равен нулю, бесконечен или не существует, то ряд расходится. Лишь при нулевом значении предела нужно продолжать исследование.*

**Пример 1. Гармонический ряд (классический)**

Своё название он получил благодаря тому, что все его члены, начиная со второго, являются средними гармоническими значениями между двумя соседними. Это ряд: ,  Для него выполняется необходимый признак сходимости:



Для доказательства расходимости гармонического ряда рассмотрим последовательность , предел которой равен . Свойство этой последовательности заключается в том, что она монотонно возрастает и ограничена сверху значением .

Для неё верно: 

Прологарифмируем это неравенство:







Поскольку – общий вид всех элементов гармонического ряда, а для каждого n получена оценка снизу.

Перейдём к логарифму:

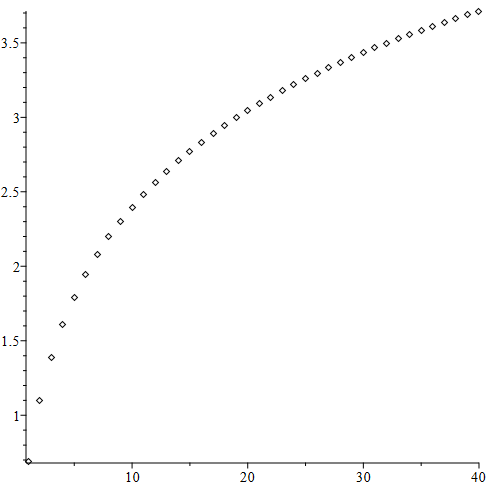


Это доказывает, что n-ая частичная сумма для гармонического ряда равна:



При предельном переходе к : 

Подтверждаем это построенным графиком в СКА Maple:



Таким образом, частичные суммы гармонического ряда растут с увеличением n, а это означает, что ряд расходится и имеет бесконечную сумму.

**Пример 2. Исследовать на сходимость.**



 (так как равно отношение коэффициентов). Теорема 1 (необходимый признак сходимости) не выполняется, а теорема 2 (достаточный признак сходимости) выполняется, но тем не менее ряд расходится.

**Понятие остатка ряда**

Пусть есть ряд



Под остатком понимается ряд



Тогда – сумма остатка , если ряд сходится. Также справедливо:

(ряд сходится)

**Теорема 3 (критерий сходимости по остаткам).**

*Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков ().*

***Замечание!*** *Если ряд сходится, то отбрасывание любого конечного числа его слагаемых не оказывает влияние на сходимость.*

Докажем необходимость:



Имеем: где где  

Тогда 



Чем больше увеличиваем , тем ближе к нулю.

**Следствие:** при неограниченном увеличении n сумма остатка ряда становится бесконечно малой: . Значит для любого сколько угодно малого **ε** найдётся начиная с которого остаток будет меньше **ε** по модулю.

**Теорема 4 (критерий Коши).**

*Ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого* ***ε****(ε**> 0) найдётся такой номер зависящий только от* ***ε****, что для всех , выполняется неравенство*



 – отрезок ряда

Доказательство полностью повторяет доказательство критерия Коши для сходящихся числовых последовательностей с той лишь разницей, что здесь в роли элементов последовательности выступают частичные суммы ряда.

**Теорема 5 (о группировке членов сходящегося ряда).**

*Если числовой ряд сходится, то его члены можно группировать произвольным образом в порядке их следования, при этом сумма ряда не изменится.*

**

Получаем новый ряд:

Поскольку для исходного ряда , то для ряда частичные суммы:

У нас была последовательность: и получим последовательность . То есть произошло выделение из исходной последовательности подпоследовательности. Такая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и исходная последовательность.

**Теорема 6 (о линейной комбинации сходящихся рядов).**

*Если есть два сходящихся ряда и , где A и B суммы, то линейная комбинация этих рядов так же является сходящимся рядом, причём его сумма будет равна для*

*Доказательство:*

Последовательность частичных сумм рядов сходится к их суммам:

Чтобы доказать, что сходится линейная комбинация рядов, составим частичную сумму исследуемого ряда:

(т.к. конечная сумма, а с конечной суммой возможно выполнять любые действия)

Такой же результат и в таком случае:

Получим ряд такого же вида.

*Обобщение:* Если некоторое количество рядов сходится, то и сходится любая их линейная комбинация.

1.3 Достаточные признаки сходимости положительных рядов

**Знакоположительный ряд –** ряд с общим членом называется положительным или строго положительным, если все его члены неотрицательны или больше нуля.

**Знакоотричательный ряд –** ряд с общим членом называется отрицательным или строго отрицательным, если все его члены отрицательны или меньше нуля.

СЮДА ДОБАВЬ

***Замечание!***  *Признаки достаточные (о которых идёт речь) сформулированы для положительных рядов, но их можно применить и к отрицательным рядам на основании следующего заключения*

**Теорема 1(критерий сходимости положительного ряда).**

*Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм является ограниченной.*

*Доказательство* базируется на свойстве монотонной ограниченной последовательности.

Монотонная ограниченная последовательность сходится, таким образом, чтобы доказать справедливость этого утверждения достаточно показать, что для положительных рядов последовательность частичных сумм является возрастающей, так как:

**Следствие 1:** *положительные ряды всегда имеют или конечную сумму, или бесконечную сумму.*

**Следствие 2:** *если в положительном ряде последовательность частичных сумм не является ограниченной, то ряд расходится.*

**Пример 1.** Используя критерий сходимости положительного ряда, доказать сходимость или расходимость ряда:

Составим частичную сумму:

Всего слагаемых. Оценим каждое слагаемое снизу, заменив каждый знаменатель большим выражением (дробь станет меньше). Окажется, что:

**Пример 2. Ряд Дирихле (обобщённый гармонический ряд) СЮДА РЯД.**

*Если , то для которого уже доказана расходимость с помощью второго замечательного предела.*

*Если , то связаны соотношением, значит , что ряд расходится.*

*Если , то*

*Таким образом ряд сходящийся.*

**Признаки сравнения**

**Теорема 2 (признак сравнения).**

*Пусть , , тогда для рядов и выполняется следующее условие: если ряд с общим членом (большим элементом) сходится, то сходится и ряд, составленный из меньших элементов (ряд с общим членом ).*

*Если ряд, составленный из меньших элементов (подразумевается некоторое Cn, связанное соотношением СЮДА СООТНОШЕНИЕ ЧТО Сэн МЕНЬШЕ Аэн) расходится, то расходится и ряд, составленный из больших элементов.*

Составим последовательность частичных сумм для обоих рядов:

При имеем, что

Поскольку , то

**Теорема 3 (предельный признак сравнения).**

***Замечание!*** *Использование Теоремы 2 на практике бывает затруднительным из-за необходимости доказать неравенство , поэтому более предпочтительным является предельный формат.*

*Если для двух заданных строго положительных рядов выполняется условие , где , то они сходятся или расходятся в одинаковом смысле. При конечном , при из сходимости с общим членом следует сходимость ряда с общим членом . При из расходимости ряда с общим членом следует расходимость ряда с большим членом .*

**Теорема 4 (признак сравнения отношений).**

*Если для двух положительных рядов с общими членами выполняется условие:*

*То из сходимости ряда с общим членом следует сходимость ряда с общим членом . Из расходимости ряда с общим членом следует расходимость ряда с общим членом .*

**Пример 3.** Доказать сходимость ряда:

Следовательно

Был использован метод математической индукции.

**Пример 4.** Исследовать ряд на сходимость:

Оцениваем сверху общий член ряда таким выражением, чтобы ряд сходился

Следует, что - сходящийся по признаку сравнения отношений со сходящимся рядом .

**Эталонный ряды**

**Сходящиеся:**

**1) Уберёшь цифры, но оставишь отступы**

**2)** Дирихле -

**Расходящиеся:**

**1)**

**2)** Дирихле -

**Пример 5.**

Составим функцию:

Точка 1 – точка максимума.

Ряд . Известно, что он расходится. Тогда ряд тоже расходится.

**Пример 6.** Исследовать ряд:

Сравним этот ряд с гармоническим рядом, используя предельный признак сравнения:

Поскольку гармонический ряд расходится, следовательно и исходный ряд тоже расходится.

**Признаки сравнения, использующие свойства элементов самого исследуемого ряда**

**Теорема 5 ( признак Даламбера).**

*Если для строго положительного ряда с общим членом выполняется соотношение , , то ряд сходится.*

*Если соотношение , то ряд расходится.*

*Доказательство:*

Поскольку , , то - сходящийся. Значит, вместе с ним сходится .

Сходится остаток, значит, сходится ряд.

***Замечание!***  *Признак Даламбера легко определяет сходимость быстросходящихся рядов (таких как геометрический ряд).*

***Замечание!***  *На практике более удобным часто оказывается* ***предельный признак Даламбера****:*

*Если , то при ряд сходится, при ряд расходится, при признак не даёт ответа о сходимости( нужно использовать другой признак).*

**Пример 7.** Используя признак Даламбера, исследовать ряд:

***Замечание!*** *Признак Даламбера даёт расходимость рядов, которые расходятся по достаточному признаку расходимости.*

**Теорема 6 (радикальный признак Коши)**

*Если для строго положительного ряда выполняется следующее условие:*

*(ТУТ НАДО УСЛОВИЕ РАСПИСАТЬ У НЕЁ В ТЕТРАДИ НЕ СОВСЕМ ПРАВИЛЬНО)*

***Замечание!***  *На практике более удобным часто оказывается* ***предельный признак Коши****:*

*При - сходится, при - расходится , при признак не даёт ответа ( нужно использовать другой признак).*

**Пример 8.**

**Теорема 7 (признак Раабе).**

*Если для строго положительного ряда выполняется условие:*

*То ряд сходится, при - расходится.*

Дано:

1)

2)

***Замечание!***  *На практике более удобным часто оказывается* ***предельный признак Раабе****:*

*Если , то*

*При - ряд расходится*

*При - ряд сходится*

*При - признак не даёт ответа(используй другой)*

***Пример 9.***

1. **Признак Даламбера**

Не даёт одназначного ответа.

1. **Признак Раабе**

Следовательно ряд сходится.

**Теорема 8 (интегральный критерий Коши).**

*Пусть общий член положительного ряда представлен функций натурального аргумента и функцией непрерывного аргумента , которая определена и неотрицательна на , выполняется непрерывность, неотрицательность и убывание. Тогда сходимость или расходимость исходного ряда будет определяться соответственно со сходимостью или расходимостью несобственного интеграла*

(Это геометрический смысл интегрального критерия Коши)

Перепишем в виде:

Из этого следует, что интеграл сходится.

Обратное доказательство:

Из этого следует сходимость ряда

**Следствие:** оценка остатка ряда

- положительный, монотонно убывающий ряд ( обладает теми же свойствами, что и ряд )

**Пример 10.**

Применим к ряду признак Коши, но при не выполняется необходимый признак сходимости. В случае имеем, что

Используем интегральный признак Коши:

* Составим функцию
* Данная функция определена и непрерывна на
* При условии убывает. Для проверки данного утверждения найдём производную:
* СЮДА ПОСЛЕДНЮЮ ФУНКЦИЮ

Составим интеграл:

Сходящийся несобственный при гарантирует сходимость ряда Дирихле, в остальных случаях ряд расходится.

**Пример 11.**

**Пример 12.**

Вычислить с точностью

Это положительный ряд

***Замечание!*** *Используем оценку остатка сходящегося ряда (ряд сравним с рядом Дирихле с показателем 2, следовательно ряд сходится) с помощью следствия интегрального признака Коши.*

Вычислим интеграл и по формуле Ньютона-Лейбница находим предел.

1.4 Сходимость знакопеременных рядов

Числами знакопеременного ряда являются действительные числа любого знака , причём и тех и других – бесконечно много.

В отличии от рядов знакопостоянных или тех, в которых слагаемых другого знака лишь конечное множество, знакопеременные ряды могут не иметь ни конечной, ни бесконечной суммы.

**Определение 1.** *Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся , если сходится положительный ряд, составленный из модулей его членов.*

**Теорема 1. (Коши)**

*Если - сходится , следовательно - сходится .*

Доказательство следует из

**Определение 2.**

*Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то его называют условно сходящимся.*

**Определение 3.**

*Ряд вида - знакочередующийся ряд.*

**Теорема 2. (Лейбница)**

*При , имеем , что монотонно убывающая, бесконечно малая последовательность , и , то ряд сходится.*

Если - расходится, то сходится. ( при условии, что это условно сходящийся ряд)

Если - сходящийся, то абсолютно сходящийся.

Таким образом, при исследовании сходимости знакопеременных рядов сперва проверяем необходимый признак (сходимость и расходимость)

Если Теорема Лейбница для абсолютно расходящихся знакочередующегося ряда не выполняется, ряд расходится. Но обычно не выполняется необходимое условие сходимости для таких рядов.

**Определение 4.**

**Лейбницевский ряд –** ряд, для которого выполняется теорема Лейбница.

**Следствие** (оценка суммы и остатка ряда Лейбница)

Сумма ряда Лейбница не превосходит первого члена и положительна

Также .

Знак остатка совпадает с первым элементом остатка ряда. Значит, если , то , если , то

**Здесь эти если то можно расписать через скобку квадратну.**

**Пример 1.**

Исследовать ряд на сходимость:

Зная, что - расходится ( гармонический ряд) , проверим условия теоремы Лейбница:

В исходном ряду есть знакочередование:

Ясно , что , значит последовательность убывающая

Значит, ряд расходится, так как выполняются условия: нет абсолютной сходимости, но он сходится по т. Лейбница.

**Пример 2.**

Исследовать ряд на сходимость и вычислить сумму ряда с точностью :

Сперва нужно доказать, что ряд является условно сходящимся.

Затем найдём приближённые значения суммы ряда с заданной точностью, оценив его остаток.

Когда мы говорим об остатке, то первый член этого ряда будет . Таким образом:

Значит, в качестве частичной суммы будет пять слагаемых

1.5 Свойства сходящихся рядов

**Теорема 1 (критерий абсолютной сходимости)**

*Знакопеременный ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся знакопостоянные ряды, составленные из только положительных и только отрицательных членов этого ряда.*

***Доказательство:***

Поскольку - положительные, то это означает, что . Если ряд сходится абсолютно, то на основании теоремы сравнения будут сходится ряды, составленные из только положительных слагаемых. Таким образом, имеем ситуации:

1. Сходится ряд (т.к. положительный) , следовательно и - сходятся .
2. Ряд и ряд - сходятся(сходится их сумма), значит, ряд тоже сходится.

***Замечание!***  *Если один из рядов и с общим членом - сходится, и - расходится, тогда исходный ряд имеет бесконечную сумму, а значит – расходится (т.к. оба ряда положительны). Значит, условная сходимость знакопеременного ряда возможна лишь в случае, если оба ряда расходятся.*

**Теорема 2 (Дирихле).**

*Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить его члены, то полученный ряд будет сходиться к той же сумме.*

**Доказательство:**

ОСТАВЬ № ПРОБЕЛА – абсолютно сходящийся

1. Рассмотрим ряд, состоящий из положительных членов:  
     
     
   Составим сумму, состоязую из -ых номеров (те, что переставили просуммируем)  
   Выберем максимальное значение из :  
     
     
   Теперь перейдём к пределу:  
     
   Где - сходящийся ряд , - сумма этого ряда.  
     
   Отсюда   
   **Следствие:** Если в качестве исходного ряда рассмотреть ряд (\*), у которого сумма и переставить всё назад, то получим ряд, для которого выполняется условие   
    Таким образом :
2. Рассмотрим знакопеременный ряд  
     
   На основании критерия абсолютной сходимости можно ряд , составленный из переставленных элементов, записать как ряд, в который входят из положительного ряда элементы и из отрицательного . Поскольку они положительны, их суммы останутся прежними.

***Замечание!***  *Абсолютная сходимость ряда является существенной в требовании теоремы*

**Теорема 3 (Римана).**

*Если знакопеременный ряд сходится условно, то для любого действительного значения найдётся такая перестановка членов этого ряда, что ряд, составленный из - перестановок будет сходиться и его сумма будет равна .*

**Доказательство:**

Пусть знакопеременный ряд условно сходится, тогда для любого действительного числа можно подобрать такую перестановку , что полученный ряд будет сходиться и сумма его будет равна .

Если ряд сходится условно, то ряд, составленный из положительных элементов и - расходятся.

, причём

Это означает, что берётся минимальное значение слагаемых для превышения суммы .

Берётся минимальное количество слагаемых для превышения суммы .

Результатом является знакочередующийся ряд , где

Теперь из требования минимальности слагаемых гарантируется убывание последовательности .

Предел равен , если разница между -ой частичной суммой и пределом не превосходит некоторое малое значение.

Зная, что стремится к нулю и разница между и тоже бесконечно мала, из этого следует монотонное стремление к нулю.

Если данный ряд – ряд Лейбница, то его остаток не превосходит , а значит , разница между и будет бесконечно убывающей.

**Вывод:**

Абсолютно сходятся те ряды, которые имеют достаточно большую скорость роста модулей элементов. Условная сходимость обеспечивается погашением положительных и отрицательных членов ряда, поэтому существенно зависит от порядка их следования.

**Определение 1.**

Произведением двух рядов называется ряд с общим членом , который рассчитывается по формуле:

Можно выписывать элементы ряда с общим членом по диагонали матрицы.

**Теорема 4 (об умножении рядов).**

*Если ряды с общими членами и соответственно являются абсолютно сходящимися с суммами , то ряд с общим членом сходится абсолютно, причём сумма этого ряда равна произведению сумм и .*

**Доказательство:**

1. Абсолютная сходимость по условию задачи
2. Составить для общего члена ряда , составленного из модулей произведения , частичную сумму
3. Доказать, что предел данной суммы равен . Значит, нужно составить сумму для и - составить ряд произведений.

А надо ли это?

Глава 2. Функциональные ряды

В теории функциональных рядов делается акцент на исследовании функциональных особенностей и свойств членов ряда, его частичных сумм и суммы сходящихся рядов.

2.1 Основные понятия функционального ряда

**Определение 1.**

*Формально записанная сумма функциональной последовательности называется* ***функциональным рядом,*** *для обозначения которого используют запись .*

*Этот ряд определён на , являющимся область определения для всех членов ряда.*

**Определение 2.**

Функциональный ряд сходится в точке из области определения, если сходится числовой ряд, который получается из исходного подстановкой вместо значения - .

**Определение 3.**

Множество всех точек из области определения функционального ряда , в которых функциональный ряд сходится, называется **областью сходимости ряда,** обозначим это множество .

Может быть множеством совпадающим с областью определения, быть его строгим подмножеством, быть пустым множеством.

Область сходимости может быть определена аналогично понятию сходимости числового ряда через частичные суммы функционального ряда.

**Определение 4.**

Множество точке , в которых последовательность частичных сумм функционального ряда называется его  **областью сходимости**.

**Отличие частичной суммы функционального ряда от частичной суммы числового ряда:**

* Обозначение ( - непрерывная \, действительная переменная)
* Последовательность частичных сумм – конечная сумма членов ряда от до элемента ( в зависимости от ситуации)
* Индекс частичной суммы должен быть зависящим от ( для доказательства наличия или отсутствия предела)

**Определение 5.**

Функция , для которой выполняется условие – предел последовательности частичных сумм равен для любой точки из области :

Называется **сумма ряда.**

Знак «=» в выражении ставится, когда предел .

Если ряд расходящийся, то записывать такое выражение нельзя.

**Определение 6.**

Ряд называется абсолютно сходящимся в области , если сходится ряд составленный из модулей ряда .

В случае , если ряд сходится, но не сходится абсолютно, он называется **условно сходящимся.**

**Пример 1.**

Исследовать на сходимость:

1. Область определения данного ряда:
2. Определим, сходится ли ряд абсолютно, используя признак сходимости, например, Даламбера:
3. Рассмотрим точки и :

* При имеем , который сравним с рядом (расходится), следовательно , исходный ряд расходится
* При имеем - нет абсолютной сходимости (см. предыдущий пункт при ). С другой стороны, этот ряд знакочередующийся  
   - монотонно убывающий  
    
  следовательно, ряд Лейбница, а значит – ряд сходится.

1. Таким образом  
    - абсолютно сходится  
    - область сходимости

**Пример 2.**

Исследовать на сходимость ряд:

1. Область определения: (все кроме 1 и 2)
2. Определим сходится ли ряд на основании радикального признака Коши:  
     
    - следовательно, сходится  
   Решим неравенство:
3. Рассмотрим точки :

* При имеем - расходится
* При имеем расходится

1. Таким образом, область абсолютной сходимости

**Пример 3.**

Исследовать ряд:

Ряд сходится, поскольку сравним с рядом Дирихле:

Сходится по признаку сравнения

**Пример 4.**

Исследуйте ряд:

1. Оценим знаменатель ( модуль члена)  
     
    при ( равном 1)  
    при ( равном -1)
2. Нас интересует верхняя оценка - , которая сравнима с рядом
3. Поскольку ряд сравнив с гармоническим рядом, то исходный ряд расходится
   1. Равномерная сходимость функционального ряда

Понятие равномерной сходимости аналогично понятию равномерной сходимости функциональной последовательности.

Для функциональных рядов характерно два типа сходимости: поточечная сходимость и равномерная сходимость на множестве.

**Определение 1.**

Означает: последовательность сходится в пункте в некоторой точке , если для сколь угодно малого найдётся номер, зависящий от и выбранной точки , что для всех больше абсолютное значение отклонения частичной суммы и суммы ряда в точке меньше .

**Поточечная сходимость функциональной последовательности:**

**Определение 2.**

Последовательность сходится к функции равномерно в области , если для любого сколь угодно малого найдётся номер , зависящий только от , что при всех отклонение частичных сумм от суммы в любой точке этого множества меньше :

***Замечание!*** *Равномерная сходимость обеспечивает отклонение от для всех точек множества. Поточечная сходимость в какой-то точке я не понял почитай это*

**Геометрический смысл равномерной сходимости:**

**Определение 3(через сумму остатка).**

Последовательность сходится к функции равномерно на множестве , если для сколь угодно малого найдётся номер , что при всех выполняется:

**Пример 1.**

Это геометрический ряд????. Сходится при

Составим остаток:

**Теорема 1 ( критерий равномерной сходимости).**

*Функциональный ряд сходится равномерно на множестве тогда и только тогда, когда эта последовательность является фундаментальной.*

***Замечание!*** *В последнем неравенстве можно взять не меньше , а меньше , где - какое-то число .*

**Определение 4.**

Числовой ряд является **мажорантой**(мажорирует) функционального ряда в некоторой области , если для любого натурального и любого из этой области выполняется условие: абсолютное значение .

**Теорема 2(достаточный признак Вейерштрасса).**

*Если функциональный ряд на некотором множестве мажорируется сходящимся числовым рядом , то функциональный ряд на множестве сходится абсолютно равномерно.*

**Доказательство:**

Ряд сходится , следовательно, для любого сколь угодно малого положительного , найдётся такой номер, начиная с которого( согласно критерию Коши) выполняется условие:

Этот отрезок фактически сколь угодно мал. Теперь рассмотрим данное условие для функционального ряда:

, поскольку число слагаемых конечно, можно воспользоваться свойством модуля суммы:

Исходный ряд сходится абсолютно равномерно. Таким образом признак Вейерштрасса даёт не только достаточное условие, но ещё показывает алгоритм доказательства.

***Замечание!*** *Признак Вейерштрасса является достаточным, но не обязательно необходимым условием равномерной сходимости, поскольку можно привести пример рядов, для которых мажорирующий числовой ряд не сходится, но функциональный ряд является сходящимся равномерно:*

Пример:

**Теорема 3( признак Абеля-Дирихле).**

*Если функциональный ряд может быть представлен в виде , причём последовательность функциональная монотонно не возрастая(убывая) сходится к нулю, а последовательность частичных сумм, составленная из , равномерно ограничена на некотором множестве , тогда исходный ряд на множестве сходится равномерно.*

**Доказательство:**

Воспользуемся признаком Коши.

Дано:

* - убывающая в множестве ( большему номеру соответствует меньшее) -

Также .

* Можно найти такой номер, что для всех из множества сумма меньше какого-то положительного числа

Распишем отрезок ряда, начиная с некоторого номера   
Следовательно   
  
  
( оценим абсолютное значение отрезка, получим верхнюю оценку, заменив множители их максимальным возможным значнием, разности положительны, т.к. последовательность убывает. Модуль суммы не превосходит модуля слагаемых)

**Пример 2.**

Установить равномерную сходимость по признаку Абеля-Дирихле:

1. , убывает , т.к.   
     
   согласно признаку Дирихле, одно условие выполнено
2. Проверим ограниченность частичных сумм  
     
     
     
     
   (заменим разность косинусов на их самое большое значение – 2)  
   На множестве значений ( не включая те, где )  
    достигает своего минимального значения.

Условие равномерной сходимости выполняется на всех интервалах вещественной оси, кроме точек, где обращается в ноль.

2.3 Функциональные свойства равномерно сходящихся рядов

**Теорема 1( о непрерывности суммы).**

*Равномерно сходящийся на множестве функциональный ряд, имеющий сумму с непрерывными на этом множестве членами ряда, имеет на этом множестве непрерывную сумму.*

**Доказательство:**

1. Если непрерывна , то и сумма всех непрерывных функций тоже непрерывна
2. Функция непрерывна при условии:
3. Для доказательства непрерывности функции необходимо рассмотреть приращение функции , взяв приращение аргумента очень малое.  
     
     
     
   Функция непрерывна на множестве .

**Пример 1.**

Доказать, что сумма ряда – непрерывная функция:

Мажорирующий ряд сходится, значит, исходный ряд равномерно сходящийся. Значит, сумма ряда существует и является непрерывной функцией.

**Теорема 1 ( следствие).**

*При соблюдении условий теоремы 1, можно осуществлять в таких рядах операцию предельного перехода.*

**Теорема 2 ( о почленном интегрировании)**

*Равномерно сходящийся к функции функциональный ряд на множестве , с непрерывными на этом множестве элементами, можно почленно интегрировать по любому отрезку, который лежит в области .*

1. непрерывна в ( области раномерной сходимости), промежуток взят из области , значит, поскольку ряд равномерно сходится, то функция интегрируема.
2. Для доказательства достаточно по определению ряда посмотреть, будет ли выполняться условие сходимости:  
     
    Найдём разницу между суммой ряда и частичной суммой остаток.

Поскольку ряд равномерно сходится на множестве , то для сколь угодно малого отклонение, начиная с некоторого номера , сумм ряда , полученного почленным интегрированием , меньше .

**Теорема 3( о почленном дифференциировании).**

*Если в абсолютно сходящемся к функции функциональном ряду с непрерывно дифференцируемыми членами в области ряд, составленный из производных , сходится равномерно на множестве , то исходный ряд можно почленно дифференцировать, причём для него выполняется условие из трёх равенств.*

**Доказательство:**

Поскольку ряд равномерно сходится на множестве , то его можно почленно интегрировать по любому промежутку

Дифференцируя полученное равенство по , получим требуемое доказательство.

**Вывод:**

В области равномерной сходимости функциональных рядов с ними можно работать как с конечными суммами.

**Пример 1.**

Найти несобственный интеграл от функции , которая задана как бесконечный функциональный ряд.

1. Убедимся, что ряд равномерно сходится в области , тогда его сумма будет непрерывна ( а значит, можно посчитать интеграл)  
    Найдём сходящийся числовой ряд, мажорирующий данный:
2. Посчитаем интеграл

**Пример 2.**

1. Равномерно сходится , т.к. непрерывна
2. Способ 1.  
   Найти сумму ряда и посчитать интеграл:
3. Способ 2
   1. Степенные ряды

**Определение 1.** Функциональный ряд с общим членом называется  **степенным рядом**.

***Замечание!*** *На практике обычно рассматривают ряд вида.*

**Теорема 1 (Абеля).**

*Функциональный ряд в случае сходимости в ненулевой точке гарантирует равномерную абсолютную сходимость на любом закрытом промежутке*

**Доказательство:**

Ряд сходится, тогда предел его последовательности элементов.

Значит, существует для которого выполняется условие

Применим теорему Вейерштрасса:

Возьмём , которое

Ряд сходится, значит, согласно критерию Вейерштрасса, исходный ряд сходится равномерно и абсолютно.

**Определение 2.**

Точная верхняя грань абсолютных значений точек , в которых ряд сходится равномерно и абсолютно называется его **радиусом сходимости.**

Если сходится в единственной точке . если сходится на всей числовой оси.

**Следствие из теоремы Абеля:**

Если для степенного ряда точка является точкой расходимости ( числовой ряд расходится), то степенной ряд будет расходится и во всех точках для которых выполняется условие

**Доказательство:**

Пойдём от противного.  
 Пусть в точке ряд сходится, следовательно, по теореме Абеля он будет сходиться в точке

**Определение 3.**

Интервал , где - радиус сходимости степенного ряда, называется **интервалом сходимости** этого степенного ряда.

**Выводы( о структуре области сходимости и расходимости степенного ряда):**

* На интервале сходимости степенной ряд сходится абсолютно
* На любом замкнутом отрезке, содержащимся в интервале сходимости ряд сходится равномерно абсолютно
* За пределами интервала сходимости ( на дополнении к интервалу) степенной ряд расходится
* В точках ( на концах интервала сходимости) требуется дополнительное исследование сходимости ряда

**Структура области сходимости степенного ряда**

Данные таблицы легко переносятся на ряд:

В данном случае интервал сходимости будет центрирован относительно точки .

**Теорема 2 ( формула Даламбера).**

*Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда, можно воспользоваться признаком Даламбера для знакоположительных рядов. На основании чего можно вывести формулу для нахождения радиуса сходимости ряда на основании коэффициентов:*

**Доказательство:**

Рассмотрим применение признака Даламбера к степенному ряду:

Если существует этот предел, который равен какому-то , то для решения неравенства выразим

Следовательно

**Теорема 3 ( формула Коши).**

*Формула получается из радикального признака Коши для знакоположительных рядов.*

**Пример 1.**

Найти радиус сходимости и интервал сходимости ряда:

Согласно признаку Даламбера:

Следовательно, интервал сходимости выродился в одну точку.

***Замечание!*** *Формулы для нахождения радиуса сходимости из теоремы 2.3 можно использовать лишь в случае подряд идущих степеней икса ( без пропусков показателей). Например, для степени нельзя применить.*

**Пример 2.**

Степени идут подряд. Можем применить формулу Коши:

Точки дополнительного исследования ряда:

* Применим признак сравнения с рядом , следовательно ряд расходится
* Ряд из модулей расходящийся, следовательно, абсолютная сходимость отсутствует.  
   - монотонно убывающий, знакочередующийся и сходящийся к нулю ряд, а значит, ряд Лейбница.

Следовательно, ряд условно сходится

Таким образом, **область сходимости:**

А значит, область сходимости ряда:

**Пример 3.**

***Замечание!*** *Так как в степени есть пропуски ( степень нечётных членов) , то радиус сходимости невозможно вычислить по формулам Даламбера и Коши.*

Исследуем ряд при помощи признака Даламбера:

Максимальное значение равно 1, следовательно - интервал сходимости, а область сходимости.

Исследуем крайние точки интервала:

* сходится условно ( т.к. модуль расходится, но является рядом Лейбница)
* Так же сходится условно

Тогда имеем, что ряд сходится на

**Пример 4.**

Полное исследование ряда:

1. ( по формуле Даламбера или Коши)
2. Интервал сходимости:
3. Область сходимости
4. Исследуем крайние точки интервала сходимости:

Следовательно:  
 Область сходимости .   
 Область расходимости

2.5 Свойства степенных рядов

**Теорема 1 ( о непрерывности суммы).**

*Пусть дан степенной ряд , с радиусом сходимости , тогда его сумма - непрерывная функция в интервале сходимости ряда .*

**Доказательство:**

Поскольку данный степенной ряд является равномерно сходящимся на любом отрезке , входящем в , то его сумма , согласно свойствам равномерно сходящихся рядов на множестве, является непрерывной функцией.

**Замечание!** Если степенной ряд сходится на концах интервала сходимости, то его сумма будет обладать в этих точках односторонней непрерывностью

**Теорема 2 ( о почленном интегрировании).**

*Степенной ряд можно пачленно интегрировать по любому отрезку, который содержится в интервале сходимости . Причём:*

*Причём полученный ряд будет сходиться к функции*

**Теорема 3 ( о почленном дифференцировании).**

*Степенной ряд с суммой и радиусом сходимости можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, причём почленное дифференцирование приведёт к получению ряда, сумма которого будет совпадать с производной суммы исходного ряда.*

Замечание! Интервалы сходимости исходного степенного ряда и рядов, полученных почленным интегрированием и дифференцированием одинаковые.

**Теорема 4 ( о тождественном равенстве, Эйлера).**

*Пусть даны два степенных ряда с одинаковыми суммами:*

*Тогда в интервале , где - минимальное значение из*

**Доказательство(рекомендации):**

Поскольку мы находимся в интервале , где оба ряда сходятся равномерно по любому замкнутому отрезку, значит, их суммы ( они равны у обоих рядов) являются непрерывными функциями. В том числе непрерывность будет и в точке 0.

Далее подставляем поочерёдно и , пока не дойдёмдо ( метод мат. Индукции)

**Доказательство (реализация):**

Распишем суммы обоих рядов:

При имеем, что

Подставим в и выразим:

Поскольку непрерывна на всей области, где выполняется условие присутствует на интервале сходимости, то в точках можно левую и правую часть разделить на

При имеем

Продолжаем выполнение подстановок и выражения до и .

**Теорема 5 ( о линейной комбинации)**

*При соблюдении условий теоремы 4, справедливо следующее утверждение: линейная комбинация рядов . Сумма линейной комбинации рядов равна сумме ряда от его элементов.*

Замечание! Поскольку в ряды абсолютно сходятся ( теорема Абеля), то любая перестановка членов не изменит сумму.

**Теорема 6 ( о произведении рядов).**

*При соблюдении условий теоремы 4, ряды можно перемножать по Коши, причём сумма произведения равна произведению сумм.*

**Доказательство:**

Распишем произведение по Коши

**Пример 1.**

Найти сумму ряда и области сходимости:

- геометрический ряд . Следовательно, ряд сходится при .

Сумма ряда при равна , тогда , когда стремится справа имеем , когда стремится к слева имеем .

Это означает, что не найдётся номер , начиная с которого это неравенство будет справедливым, потому что остаток всегда больше .

Раз этот ряд сходится на , проинтегрируем:

2.6 Разложение функции в степенные ряды

Степенные ряды представляют важный инструмент при исследовании функций, поскольку их частичные суммы и отрезки являются многочленами – хорошо изученными функциями.

**Определение 1.**

Говоря, что некоторую функцию можно разложить в степенной ряд на множестве , если на этом множестве она является суммой ряда и является непрерывной.

**Теорема 1.**

*Если функцию удалось разложить в степенной ряд , то на этом множестве она является бесконечно непрерывно дифференцируемой функцией, а является суммой данного степенного ряда.*

Если при нахождении суммы ряда перед нами известный ряд, но в знаменателе находится , то нужно проинтегрировать, а если в числителе, то продифференцировать.

**Теорема 2.**

*Любой сходящийся степенной ряд к функции в области является рядом Тейлора. Это означает, что коэффициенты разложения равны:*

Замечание! Коэффициенты Тейлора определяются для исходной функции однозначно. Если рассмотреть , то либо , либо переразложить ряд по степеням в ряд по степеням , при условии, что не выйдем из области сходимости.

**Теорем 3.**

*Степенной ряд ( ряд Тейлора) сходится равномерно на к порождаемой функции, если его остаток, записанный в удобной форме Лагранжа, с ростом равномерно уменьшается до нуля на множестве*

Для выполнения данного условия необходима ограниченность

**Пояснение к теоремам 2 и 3**

Разложим в степенной ряд

- функция разложена в степенной ряд.

Этот ряд имеет область сходимости , то к какому-то ряд равномерно сходится, а значит, ряд можно дифференцировать:

Найдены коэффициенты для некоторой функции, если известно, что она задана степенным рядом.

Замечание к Теореме 3! Для доказательства равномерной сходимости ряда Тейлора на некотором промежутке, можно убедиться в ограниченности всех производных функций, порождающей этот ряд и в ограниченности интервала, где задан .

**Основные разложения в ряд Тейлора**

Распишем нахождение разложения функции :

Преобразуем и применим разложение ряда

Проинтегрируем:

Замечание! Для разложения функций в степенные ряда есть две операции:

НАДО ЛИ?

2.7 Некоторые задачи

1. Как изменить гармонический ряд, чтобы получить сходящийся ряд? С каким рядом «сравним» гармонический ряд?

Замечание! Заменять при нахождении пределов слагаемые на аналогичные функции некорректно. Это можно делать при нахождении предела произведения и отношений

Оценим общий член ряда вида

* Для этого проверим как логарифм ведёт себя по отношению к   
  Решим неравенство:  
    
    
  Значит, убывает и достаточно найти её максимум, чтобы убедиться, что это будет всегда выполняться  
  Функция для нахождения :
* Начнём оценку общего члена ряда:  
    
    
  Если сходится, то сходится, где число-гамма ( константа Эйлера)
* Частичная сумма исходного ряда растёт:

2.Бесконечные произведения

Для числовой последовательности можно построить бесконечное произведение:

Существует понятие сходимостипроизведения

Прологарифмировав, получим переход к рядам:

3.Найти область сходимости

Убедимся, что ряд абсолютно сходимся по признаку Коши:

Следовательно,

4.Убедиться в равномерной сходимости функционального ряда

Убедиться, что данный ряд является рядом Лейбница:

Данный ряд знакопеременный, монотонно убывающий. Из этого следует :

Глава 3. Ряды Фурье

3.1 Тригонометрический ряд Фурье

Для описания периодических процессов удобно не только периодические функции, но и их бесконечные суммы.

Функция называется периодической в некоторой области , если для любых точек , из этой области выполняется условие:

Имеет смысл найти среди всех наименьшее , а функцию с периодом называют -периодической.

**Свойство 1:**

*Сумма конечного числа -периодических функций является -периодической функцией*

**Свойство 2:**

*Если функция -периодическая, то функция будет с наименьшим периодом и являться -периодической.*

**Свойство 3:**

*Интегрирование по промежутку длины , где - наименьший положительный период, даёт то же самое значение, когда интегрируем по промежутку от до :*

*- основные среди периодических функций*

**Простое гармоническое колебание:**

Рассмотрим функцию вида

- неотрицательная, вещественная, обычно обозначает время

- амплитуда

- частота

- начальная фаза

Данная гармоника имеет период .

Распишем синус суммы в функции

Мы простую гармонику смогли разложить на сумму двух слагаемых косинуса и синуса.

Взяв в качестве частот положительные целые значения, запишем **сложное гармоническое колебание:**

Возникает два вопроса:

* Какие функции могут быть представлены в виде суммы гармоник?
* Если составим разложение, то как найти коэффициенты для того, чтобы гарантировано получить некоторую функцию, являющуюся суммой?

Сложное гармоническое колебание фактически является рядом и равномерно сходится к функции (результат суммирования), так как его коэффициенты стремятся к нулю монотонно из-за ограниченности синуса и косинуса.

**Разложение - периодической функции в тригонометрический ряд Фурье**

Пусть функция - периодическая и определена на всей числовой оси.

Если функция является интегрируемой на своём периоде, то ей в соответствие можно поставить тригонометрический ряд Фурье:

Учитывая то, что здесь в качестве коэффициентов , то можно рассматривать данную бесконечную сумму как разложение по

**Свойство 1:**

Зная период косинуса и синуса , можно говорить, что ряд, получившийся в результате суммирования, является -периодической функцией.

**Свойство 2:**

В результате интегрирования

Где - произведение от любых двух функций этой системы

**Свойство 3:**

Запишем 2 и 3 свойства через символ Кронекера:

**Пример 1**

Поскольку промежуток симметричный относительно нуля, нечётная , значит, интеграл равен нулю

**Пример 2.**

Чётные функции, можно перейти к удвоенному интегралу

**Пример 3.**

Предположим, что ряд равномерно сходится к при соблюдении этих допущений ряд можно почленно проинтегрировать. Согласно теории рядов, полученный таким образом ряд будет сходиться к

Для получения следующих коэффициентов, домножим левую и правую часть равенства на , т.к. ищем

Следовательно,

Коэффициенты, найденные по данному правилу называются **коэффициентами Фурье**, а ряд с этими коэффициентами – **рядом Фурье.**

**Теорема Дирихле ( о сходимости ряда Фурье).**

*Пусть -периодическая функция на промежутке кусочно- непрерывна и кусочно-монотонна. Кусочно-непрерывная – имеющая на промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода. Тогда ряд Фурье этой функции сходится во всех точках интервала.*

*При этом:*

* *В точках непрерывности :*
* *В каждой точке разрыва:*
* *В граничных точках промежутка:*

**Пример 4.**

Функция -периодическая на всей числовой оси. А формула, которая дана, это описание её поведения на . Видим, что теорема Дирихле выполняется, а значит, можно разложить в ряд Фурье:

1. Т.к. при , то исследуем на промежутке , где
2. Интеграл для нахождения ( интегрируем по частям)
3. По аналогии умножим на и получим

3.2 Частные случаи разложения в тригонометрический ряд Фурье

1. **Периодическая функция определена на промежутке равном периоду и удовлетворяет теореме Дирихле.**

В этом случае коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам аналогичным, которые записаны для теоремы Дирихле, с той лишь разницей, что интегрирование проводится по промежутку .

В этом случае ряд Фурье составляется так же и сумма ряда равна во всех точках непрерывности:

2. **Чётная функция на промежутке . Эта функция, которая задана на промежутке симметричном относительно нуля, удовлетворяет условию для всех противоположных на этом промежутке.**

Чётность и нечётность связана с областью определения, которая обязательно должна быть симметричной относительно нуля для чётной функции!

***Замечание!*** *В этом случае функция будет разложена только по косинусам, поскольку коэффициенты представляют собой интегралы от нечётной функции:*

, значит, можно перейти к удвоенному интегралу по промежутку:

**3. Нечётная функция на промежутке . Эта функция удовлетворяет условию .**

***Замечание!*** *Функция будет разложена только по синусам, поскольку коэффициенты представляют собой интегралы от нечётной функции:*

Значит, можем перйти к удвоенному интегралу по промежутку

***Замечание!*** *Речь шла о -периодических функциях, главный период которых обладает свойством чётности и нечётности. Если функция задана только на промежутке , то строим ряд Фурье для её периодического продолжения на всю числовую ось.*

**4. Функция задана на .**

В этом случае ряд Фурье будет построен по косинусам для чётной функции, по синусам для нечётной ( аналогично пунктам 2 и 3). Интегрирование для нахождения коэффициентов необходимо проводить по промежутку

Для чётной функции:

Для нечётной функции:

**5. Пусть -периодическая функция, где , разложение функции на промежутке :**

При получаем теорему Дирихле.

Заменим

* Путём сжатия и растяжения отрезка приходим к ситуации с -периодической функцией, которая обладает свойствами, описанными в теореме Дирихле.
* Тригонометрические функции и обладают свойством ортогональности и нормированности, а значит, имеем право по ним раскладывать.

**6. Если функция задана на промежутке , то можно продолжить её чётным способом на весь промежуток , или нечётным способом, в резульатте:**

1) Продолжение на чётным способом:

, следовательно, на расписывать не нужно

2) Продолжение на нечётным способом:

Эти построения приведут к сумме ряда для -периодической функции .

Значит, если функция чётная или нечётная, то их графики будут бесконечно периодично копироваться в обе стороны.

***Замечание!*** *Если рассмотреть эту функцию как –периодическую, то разложение будет возможным и по синусам и по косинусам.*

**7. Разные способы разложения на произвольном отрезке .**

* Функция задана на является периодической? С каким периодом?
* Если функция непериодическая, а нужно построить разложение Фурье, то в любом случае это разложение строится для её продолжения

1. Если раскладывать по косинусу:
2. Если раскладывать по синусу:
3. Строим ряд Фурье для бесконечного продолжения :

3.3 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Используя эти подстановки, вернёмся к ряду Фурье:

- -периодическая функция

Данная форма ряда Фурье называетсяего **комплексным вариантом (комплексная форма ряда Фурье)**

Для нахождения коэффициентов используем формулу:

Проверим, что эта формула справедлива:

**Пример 1.**

Разложить в ряд Фурье функцию:

***Замечание!*** *Для заданной функции нахождение коэффициентов действительных и вручную более громоздко, чем нахождение коэффициента , поэтому часто, для построения вещественного ряда Фурье, делаем переход от к .*

Строим ряд Фурье для периодического продолжения

**Вывод:**

Аналитическая функция, поэтому можно интегрировать по формулам Ньютона-Лейбница через первообразную.

Следовательно, получаем:

3.4 Общий ряд Фурье

Рассмотрим пространство, связанное с введением физических векторов на плоскости (двумерное пространство)

, где 2-размерность пространства, которая конечна.

Если мы имеем множество элементов из пространства, каждый элемент которого задаётся как упорядоченная пара чисел, то на них можно ввести две линейные операции( со свойствами замкнутости относительно этих операций):

1. ВЫДЕЛИ ЖИРНЫМ ОПЕРАЦИЮ (результат принадлежит пространству ) результат можно найти по правилу параллелограмма или треугольника (перейти к координатам). Этой операции присуще свойство коммутативности и ассоциативности.
2. **Умножения на скаляр (число)** ( результат операции принадлежит пространству). Эта операция обладает свойтвами коммутативности, ассоциативности.

Две данные операции объединяет свойство дистрибутивности:

1. **Скалярное произведение:**

* Свойства:   
  Если векторы ненулевые, то скалярное произведение равно нулю только в том случае перпендикулярности и :  
    
  Следовательно,   
  Проекция на вектор
* Операция скалярного произведения коммутативна, дистрибутивна  
    
  В данном случае есть возможность разложить не только по векторам и , но и подвести под орты. Нормируем и :  
    
  Зная, что , где и имеем:

Для быстрого вычисления скалярного произведения ненулевых векторов используется формула:

, где - координаты , а - координаты .

Для использования необходимо, чтобы два вектора были перпендикулярными и единичной длины (ортонормированными).

Для вычисления скалярного квадрата, используем формулу :

, следовательно, длина :

Введём понятие **бесконечномерного Евклидового пространства** непрерывных на отрезке функций: , - множество всех непрерывных функций, - вектор.

Проверим выполнение аксиом, поэтому введём две линейные операции, обладающие 8 свойствами для :

1. следовательно, - сумма непрерывная на заданном отрезке.
2. следовательно,
3. Скалярное произведение:  
    (переход к интегралу Римана)  
   Выполняются свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности относительно сложения:  
     
   Пусть , следовательно, определим эти функции как ортогональные
4. Назовём нормой элемента :  
    a) ,причём ,только если  
   b)   
    c) - аналогично неравенству треугольника для длин, неравенство Коши-Буняковского.  
   Доказательство c:  
    Левая часть равна , а правая равна   
    Возведём в квадрат левую и правую часть:  
     
    Фактически имеем   
    Введём вспомогательную функцию от любого ненулевого   
     
   Имеем квадратный трёхчлен относительно переменной . Неотрицательность квадратного трёхчлена достигается в случае дискриминанта меньше нуля (так как старший коэффициент - положительный)  
     
   Тогда можно записать как
5. Вводим понятие угла:  
     
   Поскольку в качестве координат или коэффициентов разложения берём проекцию, то необходимо выразить проекцию  
     
   Но если найдётся функция , для которой норма равна 1 , то   
   Примеры: ортогональные системы тригонометрических функций   
     
     
   Для нормирования функции делим её на её же норму, тогда нормированные вышеперечисленные функции:

**Теорема 1.** *Любую ортогональную систему функций в пространстве непрерывных на отрезке функций можно нормировать.*

**Доказательство:**

Пусть - множество ортогональных функций, тогда рассмотрим для каждого элемента функцию , где - ненулевое число  
  
  
  
**Разложение ортогональной системы функций:**

Пусть - ортогональная система функций , - элемент системы

Фактически, имеем ряд:

- ортонормированная, следовательно, коэффициенты – это скалярное произведение

Таким образом, получаем коэффициенты Эйлера-Фурье:

* Если система – ортогональная, то коэффициенты Эйлера-Фурье по этой системе для некоторой функции могут быть представлены как разложение:
* Если система - ортонормированная, то коэффициенты Эйлера-Фурье по этой системе для :

**Теорема 2 (минимальное свойство коэффициентов Фурье).**

*Линейная комбинация , в пространстве , где - ортогональная система, даёт наилучшее приближение функции ( элемента) в смысле среднеквадратического приближения, если коэффициенты являются коэффициентами Эйлера-Фурье.*

**Доказательство:**

1. «Что такое среднеквадратическое приближение?»  
   Данное понятие связано с появлением понятия «нормы». Говорят, что последовательность функции сходится к функции в смысле среднеквадратического приближения, если   
     
     
   Для равномерной сходимости свойственно:

**Пример 1.**

Рассмотрим функцию

Можно задать функцию:

Если будет расти, то будет стремиться к нулю:

Пример функций, которые сходятся к на отрезке не равномерно, но в среднеквадратическом приближении. Таким образом, чтобы доказать, что они сходятся в среднеквадратическом приближении, необходимо доказать, что предел интеграла равен нулю:

1. Не ограничивая общности, будем считать, что разложение по ортонормированной системе:   
   Рассмотрим разложение по этому базису. Это означает, что данную функцию распишем в виде линейной комбинации:  
     
   Данным образом доказывается, что наилучшее приближение достигается при   
     
   Высчитываем квадрат нормы отклонения, обозначив  
     
     
     
   Рассмотрим, если бы было два слагаемых:  
     
   Так как знаем, что:  
     
     
   Воспользовавшись свойством линейности интегралов, получаем:  
     
     
     
   Из записи видно, что и левая и правая часть неотрицательны. Эта неотрицательная величина достигает минимума, когда первое слагаемое обратится в ноль. Значит, минимум будет достигаться при .  
   Из полученного равенства можно сделать вывод (в силу его неотрицательности), что (**неравенство Бесселя**)

**Теорема 3.**

*Если существует , то поскольку выполняется , то в пределе получаем:  
 , так как квадрат нормы стремится к нулю.  
 Значит, можно доказать, что - уравнение замкнутости.*

Ортогональные системы, которые удовлетворяют уравнению замкнутости, называются **замкнутыми** по этой норме

**Пример 2.**

Для тригонометрической системы записать уравнение замкнутости (проверить замкнутость системы)

Перейдём к ортонормированной системе:

Полученные коэффициенты возводим в квадрат и суммируем:

- **неравенство Парсиваля для тригонометрического ряда**

Его можно рассматривать как следствие из теоремы 3. Оно говорит, что система тригонометрических функций замкнута относительно нормы.

**Теорема 4.**

*Ортогональная система функций пространства непрерывных функций на отрезке является полной на промежутке , если любую функцию этого пространства можно разложить в ряд Фурье, который сходится к ней в среднеквадратическом приближении.*

**Теорема 5.**

*Если на промежутке выбрать точку , то интеграл от функции будет равен интегралу от ряда Фурье:*

**Ортонормированные системы:**

* **Тригонометрические системы**
* **Полиномы Лежандра, Эрмита, Чебышёва ( Бесселя, Хаара)**

**Полиномы Лежандра:**

Рекуррентное определение:

Для получения распишем в биномиальный ряд и продифференцируем

Найдём несколько полиномов:

Чтобы сказать, что является ортогональной системой, необходимо проверить выполнение условий:

* - ортогональности
* - должна иметь конечную норму

**Полиномы Эрмита**

***Замечание!*** *Для некоторых ортогональных систем функций с конечными нормами в качестве скалярного произведения берётся «скалярное произведение с весом», то есть некой функцией - весовая для скалярно произведения в пространстве*

Тогда

Введение такой функции как не противоречит по определению свойствам скалярного произведения

**Аналитическое определение:**

**Рекуррентное определение:**

Для многочленов Эрмита

Найдём несколько полиномов:

**Полиномы Чебышёва**

Существует два типа данных многочленов первого и второго рода, которые отличаются лишь весовой функцией.

Весовая функция 1-ого рода:

Весовая функция 2-ого рода:

**Аналитическая формула:**

**Рекуррентная формула:**

Найдём несколько полиномов:

**Пример 1.**

Разложить функцию по многочленам Лежандра

В данном примере можно найти коэффициенты и (чётные обращаются в ноль и тоже обращаются в ноль)

Найдём и :

**Пример 2.**

Разложить функцию по многочленам Чебышёва:

Сперва необходимо убедиться, что функцию можно разложить, для этого нужно доказать конечность нормы (конечность квадрата нормы):

(непрерывность на гарантирует выполнение данного условия)

Найдём , используя подстановку

Можно посчитать вручную, если воспользоваться определением многочленов через , при

**Пример 3.**

Разложить функцию по многочленам Эрмита:

Весовая функция:

Промежуток интегрирования:

* 1. Преобразование Фурье

**Двойной интеграл Фурье**

Пусть функция - это элемент пространства функций, определённых на симметричном относительно нуля отрезке

Для данной функции, которая раскладывается в тригонометрический ряд, запишем формулу, где вместо коэффициентов запишем их интегралы.

Можем поставить знак равно, т.к. мы находимся в той области, где примет разложение ( интеграл по промежутку , является конечным)

***Комментарий!*** *Так как и синус, и косинус имеют коэффициент независимый от переменной интегрирования, можно внести и в интегралы. Множитель является общим. В итоге получим формулу косинуса разности двух углов.*

Пусть функция непрерывна на всей вещественной оси и является абсолютно интегрируемой по , а также кусочно-гладкой (непрерывна вместе со своей производной, конечное число точек разрыва) по любому конечному промежутку вещественной оси.

Промежуток при равносилен . Учитывая данные условия, можно сказать, что:

Необходимо перейти от дискретного выражения к непрерывному. Рассмотрим как дискретное значение ( частное значение) некой новой переменной и ( непрерывно изменяющаяся частота)

Фактически, перед нами интегральная сумма. При переходе к пределу при получим интеграл:

Это и называется **Двойной интеграл Фурье.**

Причём в - непрерывная точка.

Функция определена на промежутке, абсолютно интегрируема, кусочно-гладкая по любому конечному промежутку.

**Пример 1.**

Вычислить двойной интеграл Фурье для функции, заданной следующей формулой:

Функция кусочно-гладкая.

Проверим конечность нормы:

Следовательно, интеграл Фурье существует.

***Комментарий!*** *Дальнейшее интегрирование невозможно , поэтому подставим в числитель формулу суммы синусов*

***Комментарий!*** *Подставим в левую и правую часть*

Учитывая, что получаем:

**Косинус и синус преобразования Фурье**

Распишем и разобьём на два интеграла (распишем косинус разности)

Получим данную формулу – развёрнутую формулу интеграла Фурье – на основании свойства линейности. Введём замену на функции и , которые являются непрерывными и зависящими от . Тогда запишем :

* Пусть - чётная функция, тогда в случае чётной функции находится по формуле (в данном случае равно нулю) – **косинус преобразование Фурье.**  
    
    
  Часто решается вопрос «симметризации» коэффициентов (унификации) - получение общего коэффициента:
* Пусть - нечётная функция, тогда находится по формуле – **синус преобразование Фурье:**

Обозначим как косинус преобразование Фурье.

Имеем пары функций, сопряжённых по Коши.

**Пример 2.**

Найти пары сопряжённых функций:

Для решения данной задачи в , используем команду: и получим ответ

Для вычисления синус преобразования:

**Комплексная форма преобразования Фурье**

Запишем для её представление через двойной интеграл:

В смысле чётности относительно , функция является чётной, но если бы вместо косинуса был бы синус – была бы нечётной. Если брать интеграл от нечётной функции по симметричному относительно нуля промежутку, то он равен нулю. То есть, если добавить к данному двойному интегралу интеграл, записанный с синусом, то равенство не будет нарушено:

Равносильно добавлению можно и вычесть интеграл с синусом. Это чревато тем, что при применении формулы Эйлера в случае сложения получим - аргумент, вычитание - :

Данная функция чётная, поэтому перешли к полному промежутку. Для вычитания имеем:

Поскольку экспонента имеет аргументом сумму двух слагаемых, распишем её как произведение двух экспонент:

Зависящую от экспоненту, оставляем в интеграле, а независящую – выносим за знак интеграла.

Если внести под знак интеграла , то получим аналог коэффициентов Фурье тригонометрического ряда в комплексной форме.